
Projet Scientifique en Équipe - Méthodes et Protocoles

THÉO FAUVET - MATTEO GADANI - LOUIS GOBBER
140ÈME PROMOTION

FRENCH PHYSICISTS' TOURNAMENT DANCING LIGHTS

Dancing Lights

Put a membrane with a mirror over a speaker. Then project the reflection of a laser pointer over a screen. By driving the speaker with single or multiple frequencies you may observe lines and shapes projected in the screen. Given a closed trajectory in 2D of a single line, find the input on the speaker required to “paint” the line. Can you also “rotate” the line as you desire? Investigate the limitations. <https://youtu.be/rYrdiQckGhw?t=190>

Table des matières

I	Travail expérimental	1
1	Montage et matériel communs à toutes les expériences	1
1.1	Le matériel	1
1.2	Le montage	1
2	Réalisation du balayages en fréquence entre 45 et 400 Hz	3
3	Étude du lien entre fréquence injectée en entrée et pattern obtenu en sortie	3
3.1	Méthode n°1 - Augmentation progressive du temps d'exposition	3
3.2	Méthode n°2 - Stroboscopie	3
4	Étude de la rotation des patterns	3
4.1	Réalisation du spectre de la membrane	4
4.2	Étude de l'élargissement des pics de résonance	4
4.3	Étude de la forme de la membrane	5
II	Simulation	6
1	Simulation de l'expérience : vibrations de la membrane et patterns obtenus	6
1.1	Expression des modes propres et implémentation des vibrations de la membrane	6
1.2	Implémentation et tracé du rayon incident	6
1.3	Implémentation et tracé du rayon réfléchi	7
1.4	Projection sur l'écran et animation	8
2	Simulation de la rotation des patterns	8
2.1	La famille des courbes de Lissajou	8
2.2	Choix du mode (1,1)	8
2.3	Obtention de l'expression des termes d'amplitude et de phase	9
2.4	Simulation de la rotation des patterns	10
3	Liste de l'ensemble des codes fournis	10
	Bibliographie	10

I Travail expérimental

Dans cette partie, nous allons décrire les différentes expériences mises en œuvre ainsi que le matériel utilisé pour y parvenir. À noter que certaines des manipulations décrites ici ne sont pas reprises dans la vidéo de présentation, soit pas manque de temps, soit parce qu'elles n'ont pas donné de résultats totalement satisfaisants.

1 Montage et matériel communs à toutes les expériences

1.1 Le matériel

Le matériel de base qui sera utilisé pour chacune des manipulations est rassemblé ci-dessous :

- Haut-parleur, diamètre 18cm (Fig.1a.), relié à un GBF,
- Plaque de plexiglas circulaire avec un trou de diamètre 18cm en son centre (Fig.1b.),
- Laser Helium/Neon doté d'une lentille de sortie afin d'avoir une bonne focalisation du faisceau + pinces/noix pour fixation (Fig.1c.),
- Membrane en latex, épaisseur 0.25mm + pinces double clip 41mm pour fixation aux bords (Fig.1d. et e.),
- Miroir (Fig.1g. et h.) découpé à partir d'un wafer de silicium (Fig.1f.), dimension 1.8cm × 1.3cm, épaisseur 0.4mm. Cela permet d'obtenir une surface très réfléchissante et suffisamment petite et légère pour que son influence soit minimale sur les patterns observés sur l'écran,
- Deux caméras indépendantes + norcans pour fixation.

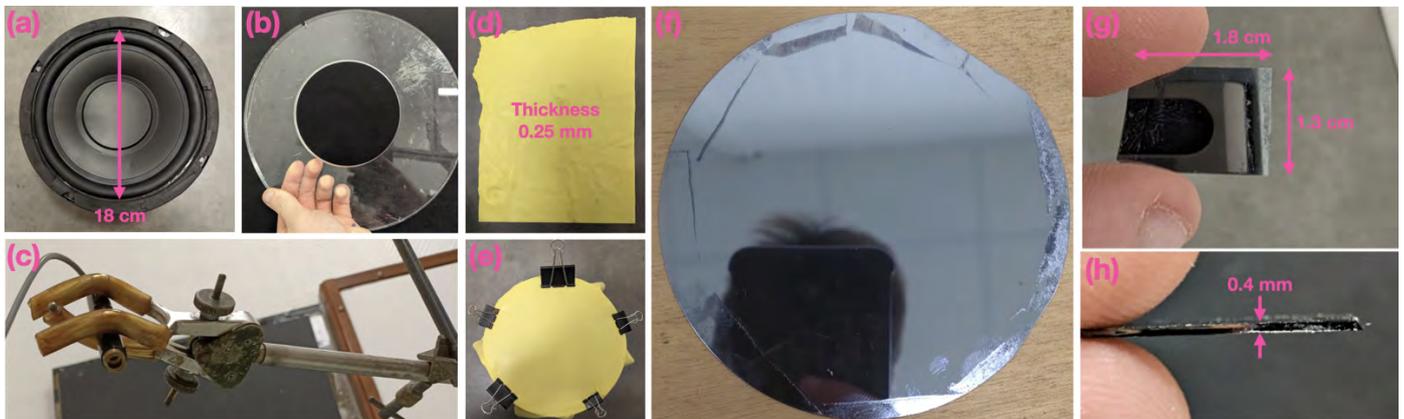


FIGURE 1 – Matériel commun à toutes les expériences (a) Haut-parleur (b) Plaque de plexiglas (c) Laser He/Ne (d) Membrane (e) Membrane fixée au-dessus du haut-parleur avec les pinces double clip (f) Wafer de silicium (g) et (h) Miroir découpé à partir du wafer de silicium

1.2 Le montage

Le montage expérimental qui sera utilisé pour chacune des manipulations est décrit ci-dessous :

- La membrane en latex est fixée par ses bords sur la plaque en plexiglas à l'aide de cinq pinces double clip. Elle doit être tendue suffisamment uniformément pour éviter des déformations dans les patterns observés. La plaque avec la membrane est ensuite déposée sur le haut-parleur. En fixant la membrane sur la plaque plutôt que directement sur le HP, on cherche à éviter que les vibrations de la structure du HP au niveau des fixations viennent perturber l'hypothèse d'amplitude de vibration nulle sur les bords. Cette méthode est bien plus efficace que celle utilisée dans la vidéo de présentation disponible à l'adresse <https://youtu.be/rYrdiQckGhw?t=190>, qui consiste à placer le HP dans un verre et à fixer la membrane sur les parois de ce dernier. En effet, les vibrations de l'air bloqué entre le HP et la membrane ainsi que des parois du verre génèrent des asymétries assez importantes sur les patterns en sortie.
- Le miroir est fixé au centre de la membrane en utilisant un point de pâte à fixe. Cette méthode de fixation est intéressante puisqu'elle permet de réduire au maximum la dimension du point d'attache et donc de ne pas trop influencer sur les vibrations de la membrane. La méthode consistant à fixer le miroir sur ses bords avec du scotch est beaucoup plus gênante puisqu'elle introduit de nouvelles conditions aux limites au niveau des bords du miroir.
- Le réglage de l'angle d'incidence du laser a également une influence considérable sur les patterns observés sur l'écran. L'incidence oblique possède en effet plusieurs désavantages :
 - ↪ d'un point de vue purement pratique, l'angle d'incidence oblique est assez difficile à contrôler précisément (le système d'accroche avec une pince trois doigts ne le permet pas, il aurait fallu le changer),

- ↪ le point d'intersection entre le laser et le miroir change au cours du temps puisque l'altitude de la membrane varie avec le temps. Cela peut facilement se visualiser à l'aide la Fig.2, gauche : lorsque la membrane est courbée vers le haut, le faisceau laser va taper sur le miroir plus tôt que lorsque la membrane est courbée vers le bas (notons que cela s'observe très bien expérimentalement puisque ce déplacement du point d'intersection se caractérise par un petit trait rouge sur le miroir). Ce phénomène est beaucoup plus gênant que la limitation pratique puisqu'il induit l'introduction d'asymétries dans les patterns (Fig.2, droite),
- ↪ puisque le point d'intersection laser/miroir se déplace au cours du temps, il faut s'assurer que la taille du miroir soit suffisamment importante pour pouvoir « contenir » ce déplacement, *ie* il faut être sûr que le laser ne sorte pas momentanément du miroir. De plus, le déplacement du point d'intersection est d'autant plus marqué que l'amplitude de vibration que l'on impose est grande, donc si on augmente cette dernière, il sera également nécessaire d'augmenter la taille du miroir. Or, on souhaite au contraire diminuer la taille du miroir au maximum pour minimiser son influence sur les vibrations de la membrane.

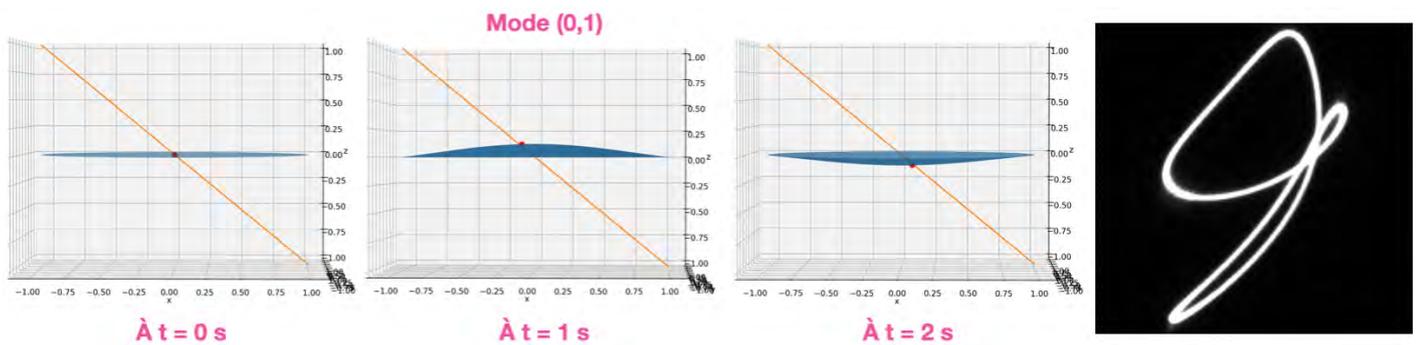


FIGURE 2 – À gauche : variation de la position du point d'intersection laser/miroir en fonction du temps lorsque l'on se place en incidence oblique (la droite orange correspond au rayon incident) - À droite : exemple d'asymétrie introduite par l'incidence oblique

- Pour toutes ces raisons, on ne placera pas le laser en incidence oblique mais plutôt à la verticale, au-dessus de la membrane. Cela permet de s'assurer que le point d'intersection laser/miroir reste toujours le même (en pratique, il reste un petit déplacement lié à une légère incertitude sur la verticalité du laser), et donc de pouvoir minimiser la taille du miroir (et sa masse par la même occasion). On va ainsi pouvoir supposer que notre miroir est suffisamment petit pour pouvoir suivre l'ensemble des mouvements de la membrane, *ie* on peut localement assimiler le miroir à la membrane (un peu comme si la membrane était directement réfléchissante à l'emplacement du miroir). Le faisceau laser réfléchi est ensuite projeté au plafond, qui nous servira d'écran.
- Deux caméras sont fixées au-dessus de la membrane, la première permet de filmer les patterns formés sur l'écran (plafond) tandis que la seconde permet d'étudier la forme de la membrane.

L'ensemble de ce montage peut être visualisé sur la Fig.3, gauche tandis que la projection du faisceau laser sur l'écran peut-être observée sur la Fig.3, droite.

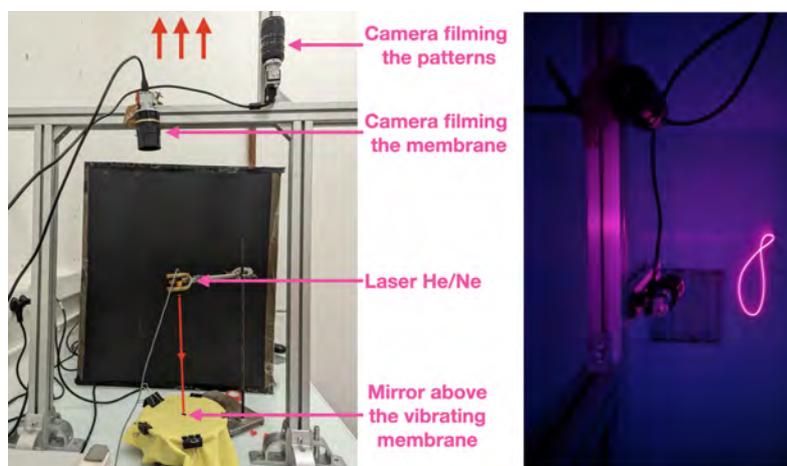


FIGURE 3 – À gauche : présentation du montage expérimental - À droite : observation du faisceau réfléchi sur l'écran (plafond)

2 Réalisation du balayage en fréquence entre 45 et 400 Hz

Dans cette partie, nous décrivons le protocole mis en œuvre pour réaliser le balayage en fréquence entre 45 et 400 Hz (et la prise d'images associée) présenté dans la vidéo à 29s. Il est important de noter que la plupart des images utilisées dans la suite de la vidéo sont issues de ce balayage fréquentiel. Le dispositif expérimental utilisé pour réaliser ce sweep fréquentiel correspond exactement à celui décrit dans la partie I.1.2, à l'exception près que le haut-parleur est relié non pas à un GBF mais à un ordinateur afin que l'évolution de la fréquence envoyée au haut-parleur puisse être contrôlée à l'aide d'un code Matlab (voir code **SoundIPT.m**). Pour filmer les patterns, on utilise la caméra pointée vers le plafond dont on règle les paramètres en utilisant le logiciel *Pylon Viewer*. Ces derniers dépendent fortement des conditions extérieures, notamment la luminosité dans la pièce (nos expériences ont été menées dans une pièce sombre). Le temps d'exposition doit être suffisant pour bien visualiser le contour de la figure dans son intégralité (et non une partie du contour comme on le fera dans la partie I.3) sans pour autant le surexposer. Le frame rate est réglé sur une valeur permettant d'avoir un pas temporel (et donc fréquentiel puisque la fréquence varie avec le temps lors du sweep) acceptable sans pour autant finir avec un fichier de taille trop importante.

3 Étude du lien entre fréquence injectée en entrée et pattern obtenu en sortie

Dans cette partie, nous décrivons la démarche mis en œuvre pour répondre à la première question du sujet : en partant d'une trajectoire fermée sur l'écran, déterminer la fréquence qu'il a été nécessaire d'injecter en entrée du haut-parleur.

3.1 Méthode n°1 - Augmentation progressive du temps d'exposition

Pour ce premier protocole, le dispositif expérimental décrit dans la partie I.1 et la caméra pointée vers le haut sont utilisés. Le principe et la mise en œuvre de la méthode sont décrits dans la vidéo intitulée **det_freq_methode1** fournie dans les documents complémentaires. Les résultats obtenus sont quant-à-eux présentés dans la vidéo principale à 1min47s. Pour les incertitudes, nous avons supposé que l'incertitude sur la fréquence envoyée par le GBF est négligeable tandis que celle sur la mesure de la période est donnée par la plus petite variation de temps d'exposition qu'il est possible d'imposer avec le logiciel : $\Delta T = 1\mu s$, ce qui impose une incertitude sur la fréquence $\Delta f = \frac{\Delta T}{T^2}$. Les incertitudes sur la pente et sur l'ordonnée à l'origine de la droite d'évolution de f_{laser} en fonction de f_{entree} sont ensuite calculées à l'aide de la méthode de Monte-Carlo.

Remarque importante

Cette méthode ne fonctionne qu'à condition **qu'une seule fréquence** soit injectée en entrée du haut-parleur.

3.2 Méthode n°2 - Stroboscopie

Cette seconde méthode, qui n'est pas décrite dans la vidéo, nécessite le même dispositif que la première et permet d'étudier des figures obtenues à partir **d'une ou plusieurs fréquences**. Elle repose sur le principe de la stroboscopie : le temps d'exposition de la caméra est fixé à une valeur suffisamment faible pour observer sur l'image un point ou un petit trait lumineux. Si n fréquences sont injectées en entrée du haut-parleur, alors n points lumineux doivent être observés en sortie de la caméra. La méthode va alors consister à augmenter progressivement le frame rate afin d'immobiliser successivement chacun des points observés : à chaque fois qu'un point laser est immobilisé, cela signifie que le frame rate de la caméra est égal à la période du point laser en question sur l'écran. Cette méthode permet donc également de remonter à l'information sur la fréquence en entrée. Cependant, la précision sur le frame rate autorisée par le logiciel est plus faible que celle sur le temps d'exposition : on préférera donc la première méthode pour les cas mono-fréquentiels.

Remarque importante

Dans la vidéo, l'application de la méthode n°1 est décrite dans le cas simple d'une ellipse. Cependant, des cas plus compliqués peuvent être rencontrés, par exemple celui des Lemniscates de Geronon (voir II.2.1). En effet, bien qu'une seule fréquence soit injectée en entrée, ces patterns sont construits à partir de deux fréquences : f_{entree} et $2f_{entree}$ (selon deux axes différents, x et y par exemple). La méthode n°1 reste cependant valable puisqu'elle permet d'obtenir une seule fréquence, la plus faible des deux, c'est-à-dire la fréquence f_{entree} qui correspond bien à celle recherchée.

4 Étude de la rotation des patterns

Dans cette partie, nous décrivons les différentes expériences qui permettent de répondre à la seconde question du sujet : est-il possible de faire tourner les lignes comme on le désire ?

4.1 Réalisation du spectre de la membrane

Pour tracer l'évolution de l'amplitude des patterns en fonction de la fréquence imposée en entrée du haut-parleur (voir vidéo à 2min16s), nous avons réutilisé l'enregistrement du balayage en fréquence décrit dans la partie I.2 et nous l'avons analysé en utilisant Matlab (voir code **SpectreIPT.m**). Dans ce code, l'utilisateur doit repérer, à l'aide d'un curseur, l'amplitude de la figure dans la direction où elle est maximale (voir exemple sur la Fig.4). La mesure de l'amplitude en elle-même présente une incertitude assez faible si l'utilisateur fait les mesures attentivement. Deux types d'erreurs peuvent cependant persister (l'erreur sur la fréquence est toujours supposée négligeable) :

- Erreur d'inattention lors du placement des curseurs, on ne peut pas revenir en arrière une fois que la mesure est faite, à moins de tout recommencer depuis le départ. Cette erreur est non négligeable au vu du nombre d'images à traiter mais les points aberrants ont été écartés.
- Erreur sur le repérage de l'amplitude maximale : nous pensons que cette erreur est non négligeable (tout en restant assez faible). Cependant, sa quantification précise est difficile.

Remarque

Une idée potentiellement intéressante que nous avons commencé à développer mais pas menée jusqu'au bout consiste à réaliser deux mesures d'amplitudes : une selon l'axe x, l'autre selon l'axe y. Cela permettrait d'obtenir l'évolution de la contribution de chacune des fréquences et donc des modes propres associés dans des directions précises de l'espace. Le repérage manuel (reprenant la même structure que le code **Spectre.m**) que nous avons réalisé était cependant trop imprécis pour nous permettre de conclure.

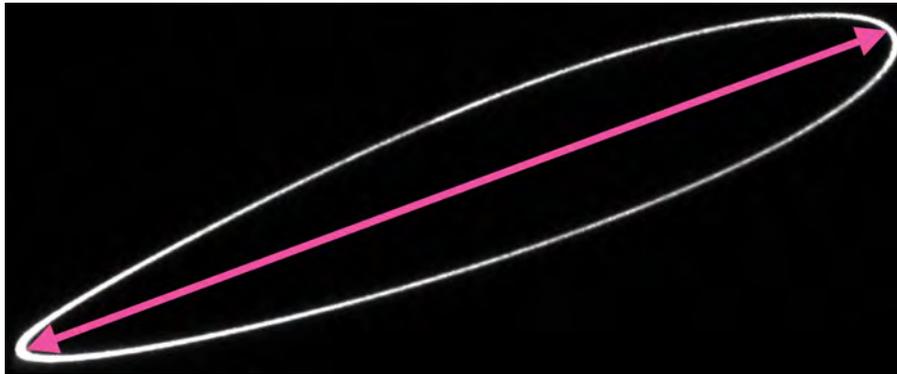


FIGURE 4 – Exemple de mesure d'amplitude pour le tracé du spectre de la membrane

4.2 Étude de l'élargissement des pics de résonance

Dans la vidéo, nous avons remarqué l'élargissement des pics de résonance sur le spectre sans aller plus loin, par soucis de concision. Cet élargissement est évidemment lié à un phénomène d'amortissement. Nous donc avons réalisé une expérience complémentaire permettant de quantifier le coefficient d'amortissement associé. Pour ce faire, on utilise le dispositif expérimental classique et la caméra pointée vers le plafond pour filmer les patterns (frame rate fixé sur une valeur importante pour avoir une bonne précision temporelle). À l'instant $t = 0$ s, on coupe le générateur, puis on mesure sur la vidéo le temps nécessaire à la disparition du pattern sur l'écran. On applique cette méthode pour différentes fréquences entre 90 et 350 Hz puis on trace l'évolution du temps de disparition des patterns en fonction de la fréquence (Fig.5a.). Sans surprise, on constate que la figure disparaît d'autant plus vite que la fréquence imposée est importante. Plus intéressant : on constate que le tracé de l'inverse du temps de disparition en fonction de la fréquence donne une droite d'équation $\frac{1}{t_{\text{amortissement}}} = 0.022 \times f_{\text{entree}} - 0.027 \simeq 0.022 \times f_{\text{entree}}$, l'ordonnée à l'origine étant négligeable devant les autres valeurs en ordonnée (Fig.5b.). Le coefficient directeur de cette droite nous donne une estimation du coefficient d'amortissement de notre expérience : $\xi \simeq 0.0224 \pm 0.0003$. Nous avons assimilé l'incertitude sur la mesure du temps de disparition à l'écart temporelle entre deux images successives : $\Delta t_{\text{disparition}} \simeq 0.001$ s puis nous avons appliqué la méthode de Monte-Carlo pour obtenir l'incertitude sur la pente. Notons que c'est ce coefficient d'amortissement que l'on retrouve dans l'expression du terme d'amplitude présenté dans la vidéo à 4min37s. On peut vérifier la cohérence de la valeur obtenue en traçant (pour différentes valeurs de fréquences propres ω_i) l'évolution du facteur d'amplitude en fonction de la fréquence : on constate ainsi que le tracé colle très bien avec les pics d'amplitude observés sur le spectre (Fig.5c.)

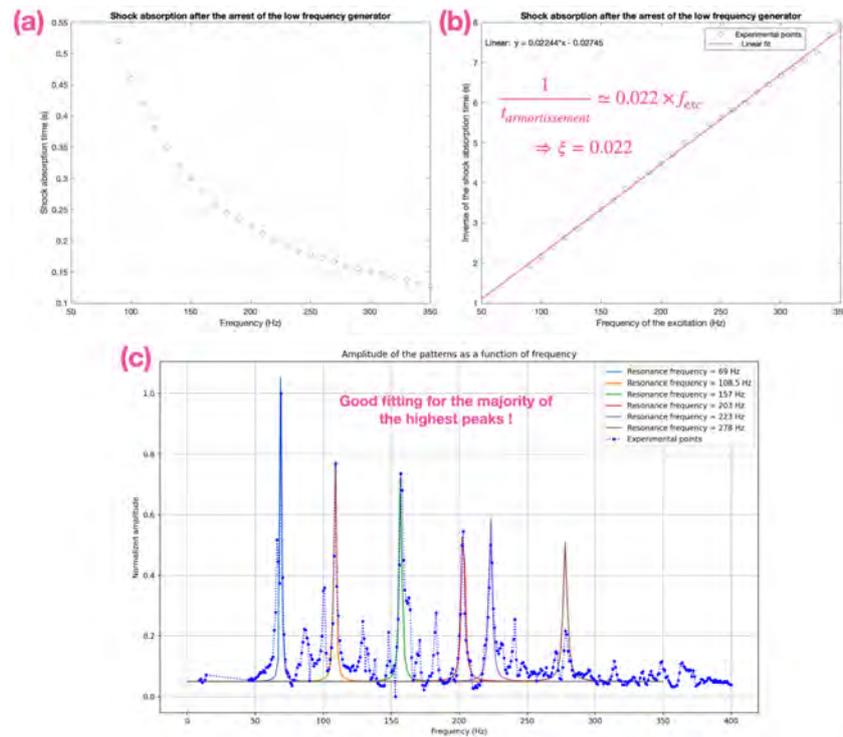


FIGURE 5 – (a) Tracé de l'évolution du temps d'amortissement en fonction de la fréquence imposée en entrée (b) Tracé de l'évolution de l'inverse du temps d'amortissement en fonction de la fréquence imposée en entrée (c) Tracé et comparaison du terme d'amplitude théorique (utilisant la valeur de ξ) avec les pics observés sur le spectre

4.3 Étude de la forme de la membrane

Sur la fin de notre projet, nous avons cherché à confirmer notre intuition sur la levée de dégénérescence de certains modes en observant directement la forme de la membrane. Malheureusement, nous n'avons pas eu le temps de mener cette piste quantitativement jusqu'au bout. Dans cette partie, nous décrirons la démarche expérimentale que nous avons commencé à mettre en œuvre.

• Mise en œuvre expérimentale

Pour cette partie, on reprendra le même montage expérimental que précédemment mais on utilisera cette fois la seconde caméra, pointée vers la membrane. Pour pouvoir observer les vibrations de cette dernière, nous avons fait le choix d'utiliser une nappe laser. Cette dernière pouvait coulisser le long d'une barre de manière à pouvoir balayer l'ensemble de la membrane (Fig.6). Les oscillations de la nappe laser nous permettaient d'avoir une idée de la manière dont la membrane vibre (mode symétrique/antisymétrique, position des nœuds et des ventres).

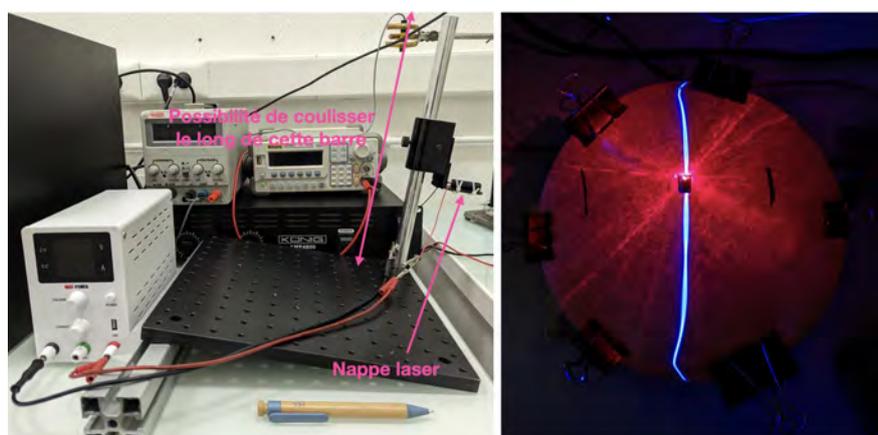


FIGURE 6 – À gauche : montage avec la nappe laser - À droite : visualisation de la nappe laser sur la membrane

• Analyse des données

Nous ne sommes pas parvenus (manque de temps) à traiter qualitativement les données issues de cette expérience. Par contre, cela donne une bonne intuition qualitative de la forme des modes qui s'y développent, et nous a permis de comprendre et d'observer la levée de dégénérescence des modes antisymétriques.

II Simulation

Cette partie vise à présenter les différentes simulations que nous avons réalisées lors de notre projet. Tous les fichiers évoqués dans les sous-parties suivantes sont fournis dans les documents complémentaires. L'ensemble des simulations ont été implémentées en langage Python.

1 Simulation de l'expérience : vibrations de la membrane et patterns obtenus

Dans cette partie, nous expliquons le principe de fonctionnement et la construction de la simulation exposée dans la vidéo à 4min10s. Nous détaillons ici le fonctionnement de chacun des fichiers du code, mais pour son utilisation, il suffit d'exécuter (et de modifier les paramètres) dans le fichier intitulé **main.py**.

1.1 Expression des modes propres et implémentation des vibrations de la membrane

Pour obtenir les expressions des modes propres de la membrane présentées dans la vidéo à 2min43s, nous avons résolu l'équation (1) gouvernant les vibrations d'une membrane circulaire de rayon R , fixée à son périmètre, présentant une densité de masse σ et une tension T uniformes, sans chargement d'air ni rigidité (voir Fig.7).

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \text{ avec } 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ u(R, \theta) &= 0 \end{cases} \quad (1)$$

Si l'on suppose une solution à variables séparées $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$, alors on obtient les modes propres sous la forme (2), comme présenté dans la vidéo :

$$u_{mn}(r, \theta, t) = [A \cos(ck_{mn}t) + B \sin(ck_{mn}t)] \times [C \cos(m\theta) + D \sin(m\theta)] \times J_m(\lambda_{mn}r) \quad (2)$$

avec $\lambda_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{a}$, α_{mn} étant le nième zéro de la fonction de Bessel d'ordre m J_m .

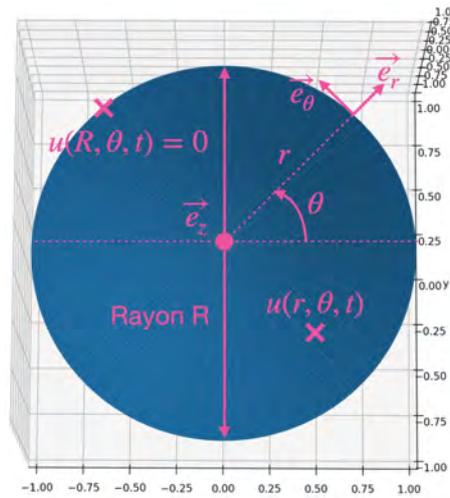


FIGURE 7 – Schéma de la membrane étudiée

Le codage de cette expression est réalisé dans le fichier **trace_surface.py**. La levée de dégénérescence des modes y est implémentée au travers des deux fonctions *circular_membrane1* et *circular_membrane2*. Pour choisir les modes que l'on souhaite superposer (fonctionne bien avec deux, se limiter à cela), il suffit de les rentrer dans la variable *mode* du fichier **main.py**.

1.2 Implémentation et tracé du rayon incident

L'implémentation du rayon incident est réalisée dans la fonction *rayon_incident* du fichier **trace_rayon.py** (voir Fig.8). Les seuls paramètres sur lesquels l'on peut jouer et qui sont directement modifiables dans le fichier **main.py** sont l'angle d'incidence du rayon et les coordonnées du point d'intersection entre la membrane et le rayon incident à l'instant $t = 0s$ (donc en l'absence de vibration). Nous avons pris l'angle d'incidence égal à $\frac{\pi}{4}$ et non à π comme dans le cas expérimental car l'implémentation d'un rayon incident vertical entraînerait des modifications importantes sur l'ensemble du code déjà réalisé. Par ailleurs, le point d'intersection entre la membrane et le rayon incident n'est pas fixé en $(0,0)$ comme dans nos expériences car on a ici affaire à une membrane parfaite, donc en se plaçant en $(0,0)$ on risque de ne pas observer de vibration pour certains modes (le point $(0,0)$ ne bougeant pas quand il constitue un centre de symétrie du mode).

Remarque importante

On entrevoit ici une des hypothèses majeures de notre modèle. On supposera en effet par la suite que **la membrane est réfléchissante**, *ie* on négligera le fait qu'un miroir solide ne suit pas parfaitement les vibrations d'une membrane et qu'il possède une extension spatiale. En particulier, le miroir ne peut pas traverser la membrane de manière à y rester tangent en son point d'attache, il adopte donc d'autres orientations, ce que l'on négligera totalement par la suite (cela revient en fait à considérer un miroir ponctuel). Cette hypothèse est majeure puisqu'elle suppose que le miroir n'influe pas sur la membrane et qu'il n'introduit pas de comportement différent de celui qui serait observé pour une membrane réfléchissante, ce qui est probablement faux (mais on a tout fait pour que cela ne le soit pas trop, voir la partie I.1 sur les caractéristiques du miroir).

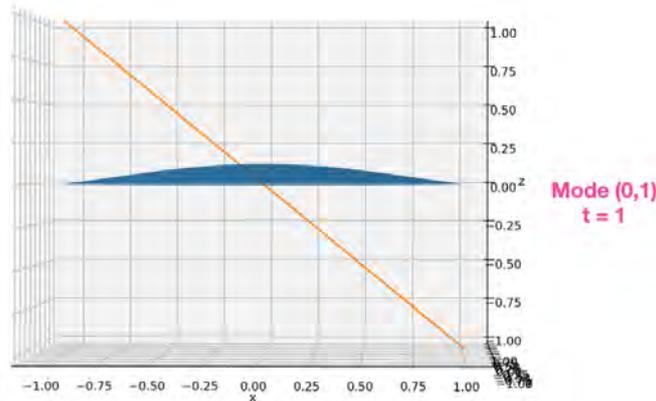


FIGURE 8 – Tracé du rayon incident sur la membrane

1.3 Implémentation et tracé du rayon réfléchi

Pour obtenir l'équation du rayon réfléchi et ainsi trouver le point d'impact de ce dernier sur l'écran, nous avons choisi de procéder à une méthode se rapprochant fortement de la réalité physique, et ce pour deux raisons principales :

- Nous voulions être certains que le résultat obtenu ne dépendrait pas de certaines hypothèses que nous aurions faites lors de la construction de l'équation théorique du rayon réfléchi en partant de la forme des modes propres de la membrane,
- Le calcul de l'expression théorique du rayon réfléchi est mathématiquement assez compliqué (voir impossible?).

Nous avons donc raisonné par étapes, avec pour but final de construire le rayon réfléchi par simple argument de symétrie avec le rayon incident (ce qui nous assure de ne pas nous tromper). Dans un premier temps, la fonction *intersection* du fichier `trace_rayon.py` trouve le point d'intersection entre la membrane et le rayon incident à un instant t quelconque différent de l'instant initial. Puis, le fichier `trace_plan_tangent.py` permet de tracer le plan tangent à la membrane au niveau de ce point d'intersection (Fig.9a.). Les fonctions *find_sym* et *find_vec_normal* du fichier `trace_rayon.py` permettent alors de trouver le vecteur normal à ce plan tangent (Fig.9b.). Enfin, la fonction *ray_refl* permet de calculer l'équation du rayon réfléchi (Fig.9c.) en construisant simplement le symétrique du rayon incident par rapport au vecteur normal dans le plan d'incidence (plan contenant rayon incident et vecteur normal).

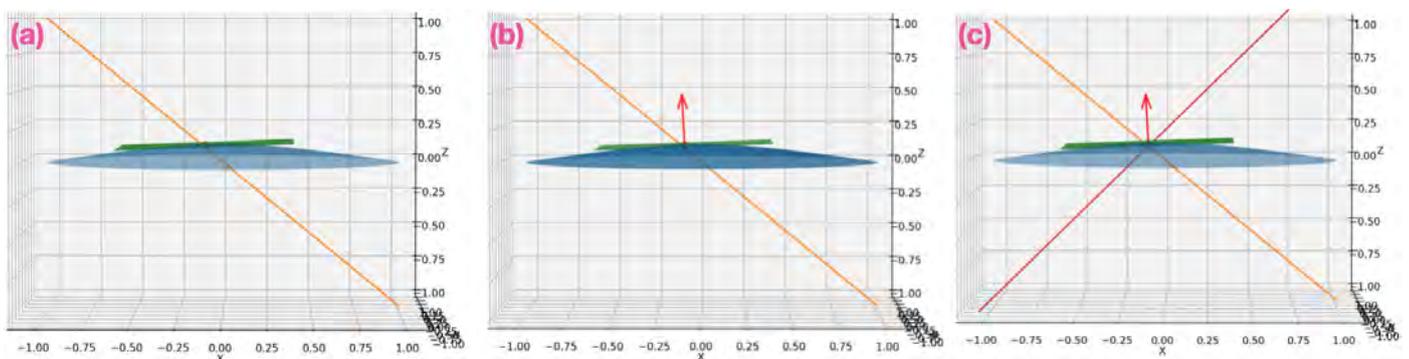


FIGURE 9 – (a) Tracé du plan tangent à la membrane au niveau du point d'intersection de cette dernière avec le rayon incident (b) Tracé du vecteur normal au plan tangent (c) Tracé du rayon réfléchi

1.4 Projection sur l'écran et animation

Désormais, il ne reste plus qu'à trouver le point d'intersection entre le rayon réfléchi et l'écran. Pour ce faire, il est nécessaire de rentrer dans le fichier `main.py` la distance entre l'écran et la membrane. On peut alors afficher le point d'intersection sur l'écran et itérer tout ce processus dans une boucle temporelle, ce qui donne la simulation de l'expérience présentée dans la vidéo.

2 Simulation de la rotation des patterns

Dans cette partie, nous décrivons les étapes permettant d'aboutir à la simulation de la rotation des patterns présentée dans la vidéo à 4min52s.

2.1 La famille des courbes de Lissajou

Les courbes de Lissajou sont une famille de courbes paramétrées pouvant être définies par l'équation paramétrique (3).

$$\begin{cases} y(t) = \alpha_y \sin(\beta_y \omega t + \varphi_y) \\ z(t) = \alpha_z \sin(\beta_z \omega t + \varphi_z) \end{cases} \text{ avec } n = \frac{\beta_z}{\beta_y} \text{ le paramètre de la courbe, } n > 1 \quad (3)$$

La Fig.10 présente différentes courbes de Lissajou, en faisant à chaque fois varier les paramètres α_i , β_i et ϕ_i . Toutes ces courbes correspondent à des patterns observés au cours de nos expériences (voir vidéo à 41s).

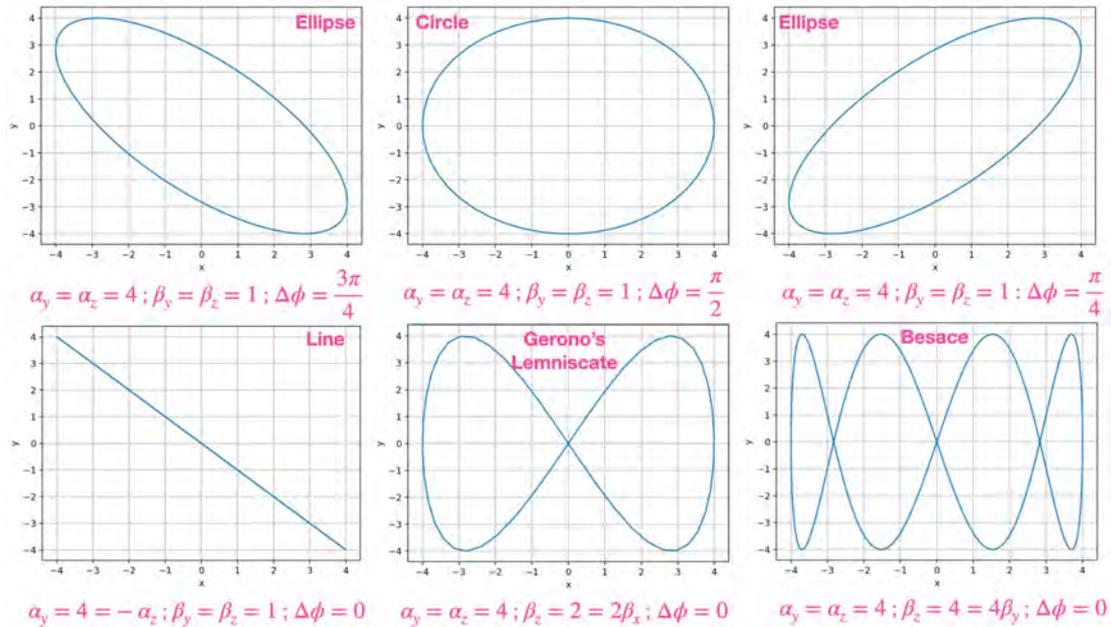


FIGURE 10 – Quelques exemples de courbes de Lissajou observées lors de nos expériences

Il est intéressant de constater que le déphasage $\Delta\varphi = \varphi_z - \varphi_y$ a une influence importante sur la figure obtenue, et c'est sur cela que l'on joue dans la vidéo pour expliquer la rotation des patterns.

2.2 Choix du mode (1,1)

Dans la vidéo, il est précisé (à 4min29s) qu'afin de simplifier la démarche, le raisonnement va être mené sur le premier mode antisymétrique, le mode (1,1). Par levée de dégénérescence, ce dernier se subdivise en deux modes $(1,1)^+$ et $(1,1)^-$ tournés d'un angle $\frac{\pi}{2}$ (Fig.11), ce qui permet de facilement séparer leur contribution dans l'équation paramétrique des courbes de Lissajou. En effet, si le rayon arrive dans le plan (XZ), alors il est clair que le mode $(1,1)^+$ va influencer la figure sur l'écran dans la direction Y tandis que le mode $(1,1)^-$ influencera la figure selon la direction Z. De plus, pour ce mode très simple, les patterns observés sur l'écran sont des ellipses, ce qui simplifie l'équation paramétrique (3) sous la forme (4).

$$\begin{cases} y(t) = \alpha_y \sin(\omega t + \varphi_y) \\ z(t) = \alpha_z \sin(\omega t + \varphi_z) \end{cases} \quad (4)$$

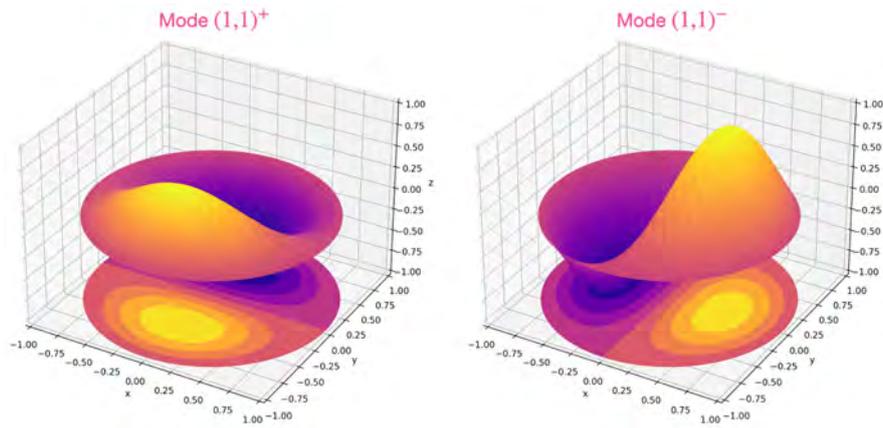


FIGURE 11 – Les deux modes orthogonaux issus de la levée de dégénérescence du mode (1,1)

2.3 Obtention de l'expression des termes d'amplitude et de phase

Nous avons compris que le mode $(1,1)^+$ pilote l'expression de $y(t)$ et que le mode $(1,1)^-$ pilote l'expression de $z(t)$. Or, si l'on assimile chacun des ces modes à un ressort (Fig.12), alors on peut trouver les expressions des termes de phase et d'amplitude α_i et φ_i dans l'équation paramétrique (4). Pour cela, il suffit de résoudre l'équation (5) régissant les vibrations d'un oscillateur harmonique amorti en régime forcé.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(r, t) - \omega_i^2 U(r, t) - \xi \frac{\partial U}{\partial t}(r, t) = U_0 e^{i\omega t} \quad (5)$$

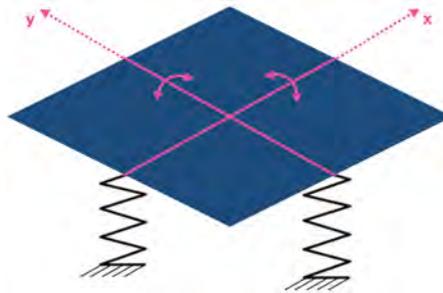


FIGURE 12 – On assimile les modes $(1,1)^+$ et $(1,1)^-$ à des oscillateurs harmoniques amortis en régime forcé. On obtient ainsi l'expression (6) dans laquelle on peut identifier les termes d'amplitude et de phase présentés dans la vidéo à 4min43s.

$$U_i(r, \omega) = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{\omega^2 - \omega_i^2 - i\xi\omega} = \alpha_i(\omega) e^{(i\omega t + \varphi_i(\omega))} \quad (6)$$

Notons que dans la vidéo, par manque de temps, on parle très rapidement de l'évolution Lorentzienne du terme d'amplitude en fonction de la fréquence mais cette dernière joue un rôle tout aussi important que le déphasage de π dans le mécanisme de rotation, comme en témoigne les quelques tracés de la Fig.13. C'est donc bien la combinaison des termes de phase et d'amplitude qui permet la rotation des patterns.

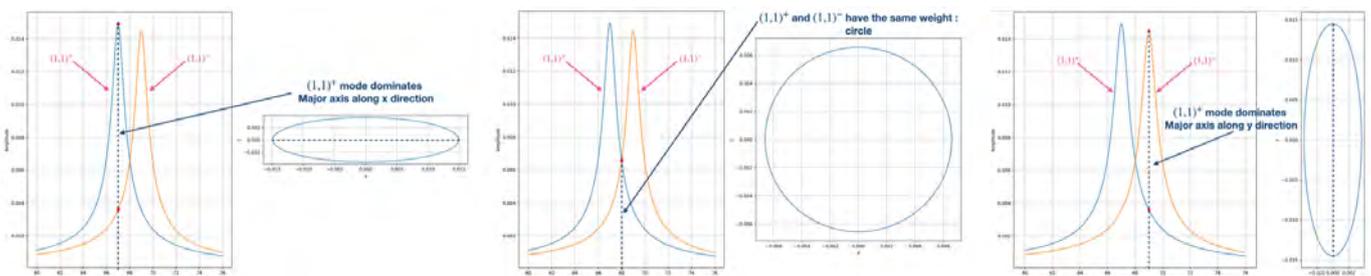


FIGURE 13 – Influence du terme d'amplitude sur la figure obtenue

2.4 Simulation de la rotation des patterns

Les formules des termes d'amplitude et de phase sont alors réinjectées dans le système d'équations (4) et implémentées dans le code intitulé `rotation_pattern.py`. Ce dernier permet d'observer l'évolution des termes d'amplitude et de phase en fonction de la fréquence imposée en entrée du haut-parleur ω et de corrélérer cette évolution avec les patterns (figure de Lissajou) observés sur l'écran. Il est possible d'y modifier les fréquences propres des deux modes étudiés (ω_y et ω_z) ainsi que le coefficient d'amortissement (ξ).

3 Liste de l'ensemble des codes fournis

- Balayage fréquentiel
 ↪ SoundIPT.m
- Analyse des données spectrales
 ↪ SpectreIPT.m
- Simulation de l'expérience
 ↪ main.py
 ↪ polynomial_regression.py
 ↪ trace_plan_tangent.py
 ↪ trace_rayon.py
 ↪ trace_surface.py
- Simulation de la rotation des patterns
 ↪ rotation_pattern.py

Bibliographie

- [1] H. J. T. Smith A. MANZER. "Oscillations of a Circular Membrane". In : *American Journal of Physics* (1972).
- [2] Y. Zhao et AL. "Scanning mirror on a vibrating membrane for dynamic optical trapping". In : *Applied Physics B* (2007).
- [3] L. KINSLER. *Fundamentals of Acoustics 4th Ed.* 1982.
- [4] Leonard MEIROVITCH. *Principles and Techniques of Vibrations.* 1997.
- [5] Philip M. MORSE. *Vibration and Sound.* 1948.
- [6] D.Hilbert R. COURANT. *Methods of Mathematical Physics.* 1937.
- [7] Randy WORLAND. "Normal modes of a musical drumhead under non-uniform tension". In : *The Journal of the Acoustical Society of America* (2010).