Propagation d'ondes dans les milieux désordonnés spatialement et temporellement

Julia ROCHA[1], Romain PIERRAT, Rémi CARMINATI
Institut Langevin, ESPCI Paris, PSL University, CNRS, 1 rue Jussieu, 75005 Paris, France
julia.rocha@espci.fr[1]

L'étude de la propagation des ondes en milieux désordonnés est un problème qui intéresse plusieurs domaines de la physique tels que la photonique, la physique atmosphérique, l'imagerie médicale et l'étude des atomes froids. Dans le présent projet, on cherche à caractériser la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu désordonné dont la permittivité fluctue à la fois en temps et en espace. Le présent document expose les calculs qui ont été réalisés pour l'obtention d'un modèle théorique pour un tel phénomène.

1 Équation d'onde

D'abord, on cherche à dériver l'équation d'onde pour un milieu désordonné dont la permittivité fluctue à la fois en temps et en espace à partir des équations de Maxwell:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t) = 0 \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = 0 \tag{2}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{\nabla \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \tag{3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \tag{4}$$

Et aussi des relations suivantes:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t) = \varepsilon_0 \alpha(\boldsymbol{r}) \beta(t) \tag{5}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \mu_0 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) \tag{6}$$

On prend une permittivité $\varepsilon_0(x, t)$ qui est fonction de la position et du temps. En combinant les équations précédentes, on a:

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla \times \left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \boldsymbol{B} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \boldsymbol{H} \tag{7}$$

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{D}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\varepsilon_0 \varepsilon(\boldsymbol{r}, t) \boldsymbol{E} \right] \tag{8}$$

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\varepsilon_0 \varepsilon(\boldsymbol{r}, t) \boldsymbol{E} \right] \tag{9}$$

On fait l'hypothèse d'un milieu unidimensionnel et on prend un champ électrique sous la forme $\boldsymbol{E}(x, t) = E(x)\hat{y}$. Cela représente un champ polarisé selon l'axe y. De cette façon on peut écrire:

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla \times \left(\frac{\partial E}{\partial x} \hat{z} \right) = -\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \hat{y} \tag{10}$$

De cette façon, l'équation d'onde devient:

$$\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\varepsilon(x,t) E(x,t) \right] = 0 \tag{11}$$

2 Lippman-Schwinger

Pour écrire l'équation de Lippman-Scwinger on prend un milieu de reférence pour lequel on a une permittivité électrique donné par ε_r. l'équation d'une onde se propageant dans un tel milieu est tel que:

$$\frac{\partial^2 E_r(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 E_r(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{12}$$

En faisant (11) - (12) on trouve:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[E - E_r \right] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\varepsilon(x,t) E \right] + \frac{\varepsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2} = 0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[E - E_r \right] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\varepsilon(x,t) E \right] + \frac{\varepsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2} - \frac{\varepsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\frac{\varepsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \tag{14}$$

En prennent $E_s = E - E_0$ et en appellent les operateurs derivée temporelle pour les équations d'onde dans les deux milieu V et V_r, on a:

$$\frac{\partial^2 E_s(x,t)}{\partial t^2} - V_r E_s = \left(V - V_r \right) E(x,t) \tag{15}$$

On reconnaît dans l'expression précédente l'équation d'Alambert avec terme source donné par:

$$s(x,t) = \left(V - V_r \right) E(x,t) \tag{16}$$

De cette façon, on peut écrire sa solution comme:

$$E_s(x,t) = \int g_r \left(V - V_r \right) E(x', t') dx' dt' \tag{17}$$

En conséquence, le champ qu'on cherche est donné par:

$$E(x,t) = E_r(x,t) + \int g_r \vartheta E(x', t') dx' dt' \tag{18}$$

avec $\vartheta = V - V_r$.

Ou également:

$$g = g_r + \int g_r \vartheta dx' dt' \tag{19}$$

où g est la fonction Green pour l'équation (11).

3 Équation de Dyson

On peut écrire l'équation de Dyson de la façon usuel:

$$\langle g(x-x_0, t-t_0) \rangle = g_r(x-x_0, t-t_0) + \int g_r(x-x_1, t-t_1) \Sigma(x_1-x_2, t_1-t_2) g_r(x_2-x_0, t_2-t_0) dx_1 dx_2 dt_1 dt_2 \tag{20}$$

Avec:

$$\Sigma(x_1 - x_2, t_1 - t_2) = \langle \vartheta(x_1, t_1) g_0(x_1 - x_2, t_1 - t_2) \vartheta(x_2, t_2) \rangle_c \tag{21}$$

3.1 Calcul de Sigma

Tout d'abord, on fait l'hypothèse qu'on a seulement les termes de second ordre dans Σ et que le désordre est continu. De cette façon, on peut écrire:

$$\Sigma = \langle \vartheta \rangle + \langle \vartheta g_r \vartheta \rangle_c \tag{22}$$

On fait également l'hypothèse que le milieu de référence a une permittivité telle que $\varepsilon_r = \langle \varepsilon(x,t) \rangle$. Cela nous permettre écrire:

$$\langle \vartheta \rangle = \langle \vartheta - \vartheta_r \rangle = \frac{\varepsilon_r}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \cdot - \frac{\langle \varepsilon \rangle}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \cdot = 0 \tag{23}$$

De cette façon, on peut écrire:

$$\langle \vartheta g_r \vartheta \rangle_c = \langle \vartheta g_r \vartheta \rangle - \langle \vartheta \rangle g_r \langle \vartheta \rangle = \langle \vartheta g_r \vartheta \rangle \tag{24}$$

Ce qui nous donne:

$$\Sigma(x', x'', t', t'') = \frac{1}{c^4} \left\langle \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \left\{ \delta\varepsilon(x', t') g_r(x' - x'', t' - t'') \frac{\partial^2}{\partial t''^2} \left(\delta\varepsilon(x'', t'') \cdot \right) \right\} \right\rangle \tag{25}$$

avec $\delta\varepsilon(x,t) = \varepsilon(x,t) - \varepsilon_r$. On remarque que $\cdot$ a été utilisé dans la deuxième dérivée pour indiquer que Σ est un opérateur.

On peut réécrire l'équation précédent comme:

$$\Sigma(x', x'', t', t'') = \frac{1}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} \left[g_r(x' - x'', t' - t'') \frac{\partial^2}{\partial t''^2} \left\{ C(x', x'', t', t'') \cdot \right\} \right] \tag{26}$$

avec $C(x', x'', t', t'') = \langle \delta\varepsilon(x', t') \delta\varepsilon(x'', t'') \rangle$.

Pour finir, on peut faire l'hypothèse d'invariance statistique:

$$C(x', x'', t', t'') = C(x' - x'', t' - t'') \tag{27}$$

Alors, l'équation de Dyson devient:

$$\langle g(x,t) \rangle = g_r(x,t) + \int \frac{g_r(x - x', t - t')}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \left[g_r(x' - x'', t' - t'') \frac{\partial^2}{\partial t''^2} \left\{ C(x' - x'', t' - t'') \langle g(x'', t'') \rangle \right\} \right] dx' dx'' dt' dt'' \tag{28}$$

3.2 Transformée de Fourier de l'équation de Dyson

Tout d'abord, on fait l'hypothèse suivante:

$$C(x' - x'', t' - t'') = \alpha(x' - x'') \beta(t' - t'') \tag{29}$$

3.2.1 Transformée de Fourier spatial: produit de convolution

On peut voir (28) comme un produit de convolution. Pour cela, on define la fonction suivante:

$$H(x' - x'', t' - t'') = g_r(x' - x'', t' - t'') \alpha(x' - x'') \tag{30}$$

De cette façon, on a pour la transformée de Fourier spatial le résultat suivant:

$$\langle G(k,t) \rangle = G_r(k,t) + \int \frac{G_r(k, t - t')}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \left[H(k, t' - t'') \frac{\partial^2}{\partial t''^2} \left\{ \beta(t' - t'') \langle G(k, t'') \rangle \right\} \right] dt' dt'' \tag{31}$$

3.2.2 Transformée de Fourier temporel

Pour la Transformée de Fourier temporel, on écrit:

$$\langle G(k,\omega)\rangle = G_r(k,\omega) + \int \frac{G_r(k,\omega')}{c^4} e^{-i\omega'(t-t')} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \Big[H(k,\omega'') e^{-i\omega''(t'-t'')} \frac{\partial^2}{\partial t''^2} \Big\{ \beta(\omega''') e^{-i\omega'''(t'-t'')\langle G(k,\omega'''')e^{-i\omega''''t''}} \Big\} e^{i\omega t} dt dt' dt'' \frac{d\omega'}{2\pi}\frac{d\omega''}{2\pi}\frac{d\omega'''}{2\pi}\frac{d\omega''''}{2\pi} \quad (32)$$

On prend les dérivées temporelles:

$$\langle G(k,\omega)\rangle = G_r(k,\omega) + \int \frac{G_r(k,\omega')}{c^4} e^{-i\omega'(t-t')} (\omega''+\omega''')^2 H(k,\omega'') e^{-i\omega''(t'-t'')} (\omega''''-\omega''')^2 \beta(\omega''') e^{-i\omega'''(t'-t'')\langle G(k,\omega'''')e^{-i\omega''''t''}} e^{i\omega t} dt dt' dt'' \frac{d\omega'}{2\pi}\frac{d\omega''}{2\pi}\frac{d\omega'''}{2\pi}\frac{d\omega''''}{2\pi} \quad (33)$$

On remarque que l'intégrale en dt donne comme résultat $2\pi\delta(\omega-\omega')$. Cela implique $\omega'=\omega$. De la même façon, l'intégrale en dt' donne $\omega''+\omega'''=\omega'=\omega$. Pour finir, l'intégrale en dt'' implique en $\omega''''=\omega''+\omega'''=\omega$. De cette façon, on a:

$$\langle G(k,\omega)\rangle = G_r(k,\omega) + \int \frac{G_r(k,\omega)}{c^4} \omega^2 H(k,\omega-\omega''')^2 \beta(\omega''') \langle G(k,\omega)\rangle \frac{d\omega'''}{2\pi} \quad (34)$$

Qui peut être écrit comme:

$$\langle G(k,\omega)\rangle = G_r(k,\omega) + \frac{\omega^2}{c^2} G_r(k,\omega)\langle G(k,\omega)\rangle \int \frac{(\omega-\omega')}{c^2} H(k,\omega-\omega')\beta(\omega')\frac{d\omega'}{2\pi} \quad (35)$$

Il est possible de vérifier que, si on enlève le désordre temporel, en faisant $\beta(t'-t'')=1$ qui implique en $\beta(\omega')=2\pi\delta(\omega')$, on obtient le résultat standard:

$$\langle G(k,\omega)\rangle = G_r(k,\omega) + \frac{\omega^4}{c^4} G_r(k,\omega) H(k,\omega) \langle G(k,\omega)\rangle \quad (36)$$

4 Calcul des paramètres

On peut écrire (35) comme:

$$\langle G(k,\omega)\rangle = G_r(k,\omega) + \frac{\omega^2}{c^2} G_r(k,\omega)\langle G(k,\omega)\rangle F(k,\omega) \quad (37)$$

avec:

$$F(k,\omega) = \int \frac{(\omega-\omega')^2}{c^2} H(k,\omega-\omega')\beta(\omega')\frac{d\omega'}{2\pi} \quad (38)$$

De cette façon, on a:

$$\langle G(k,\omega)\rangle = \frac{1}{G_r(k,\omega)^{-1} - \frac{\omega^2}{c^2}F(k,\omega)} \quad (39)$$

L'expression de la fonction Green pour une équation du type (12) dans l'espace de fourier est donné par:

$$G_r(k,\omega) = \frac{1}{k^2-k_r^2} \quad (40)$$

Ce qui nous permettre écrire:

$$\langle G(k,\omega)\rangle = \frac{1}{k^2-k_r^2-k_0^2(F(k,\omega))} \quad (41)$$

Ce résultat nous permet d'avoir deux points de vue: un pour chaque type d'illumination. Si on fixe la fréquence de l'onde incidente on peut déterminer un libre parcours moyen de la manière suivante:

$$k_{eff} = k_r^2 \left[1 + \frac{F(k_r, \omega)}{\varepsilon_r}\right] \tag{42}$$

$$\ell_s = \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{k_0 F''(k_r, \omega)} \tag{43}$$

avec F'' la partie imaginaire de F. D'une façon analogue, si on fixe le vecteur d'onde, on peut définir un libre temps moyen:

$$\omega_{eff}^2 = \omega_r^2 \left[1 - \frac{F(k, \omega_r)}{\varepsilon_r}\right] \tag{44}$$

$$\tau_s = \frac{\varepsilon_r \sqrt{\varepsilon_r}}{ckF''(k, \omega_r)} \tag{45}$$

Toutes les grandeurs sont déterminées par $F''(k, \omega)$.

5 Choix de la fonction corrélation

On a choisi une corrélation du type exponentiel comme indiqué ci-après:

$$\alpha(x) = Aexp\left[-\frac{|x|}{\ell}\right] \tag{46}$$

$$\beta(t) = Bexp\left[-\frac{|t|}{\tau}\right] \tag{47}$$

Si on prend la transformée de Fourier des expressions on a:

$$\alpha(k) = \frac{2A\ell}{1 + k^2\ell^2} \tag{48}$$

$$\beta(\omega) = \frac{2B\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \tag{49}$$

De cette façon, on peut écrire l'équation (30) de la façon suivante:

$$H(k, \omega) = \frac{iA}{k_r} \frac{1}{-ik_r + \frac{1}{\ell}} \frac{1}{1 + \frac{k^2}{(\frac{1}{\ell} - ik_r)^2}} \tag{50}$$

On peut calculer l'expression pour (38) à l'aide du logiciel *Mathematica* et on obtient:

$$F(k, \omega) = \frac{-AB\ell\,(i + \omega\tau)\left(i\ell\sqrt{\varepsilon_r} + ic^2 + \ell\sqrt{\varepsilon_r}\omega\tau\right)}{\sqrt{\varepsilon_r}\left(i\ell\sqrt{\varepsilon_r} + ic\tau - ck\ell\tau + \ell\sqrt{\varepsilon_r}\omega\tau\right)\left(i\ell\sqrt{\varepsilon_r} + ic\tau + ck\ell\tau + \ell\sqrt{\varepsilon_r\omega\tau}\right)} \tag{51}$$

Pour une fréquence fixé, la partie imaginaire de F est donné par:

$$F''(k, \omega) = \frac{AB\ell\omega\tau^2\left(c\ell\sqrt{\varepsilon_r} + 2\ell^2\varepsilon_r\tau\omega^2\right)}{\sqrt{\varepsilon_r}\left(\ell\sqrt{\varepsilon_r} + c^4\right)\left(2c\ell\sqrt{\varepsilon_r}\tau + c^2\tau^2 + \ell^2\varepsilon_r\left(1 + 4\tau^2\omega^2\right)\right)} \tag{52}$$